Lokanlni ekstremum funkcija više promjenljivih

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

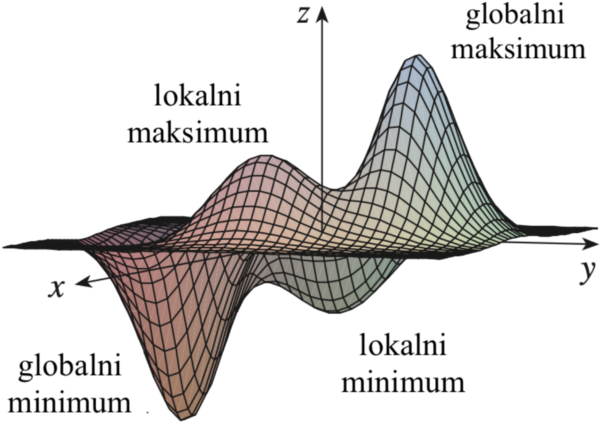
Matematika 3

- Lokalni maksimum ili minimum funkcije više promjenljivih definise se kao u slučaju jedne.
- Lokalne ekstreme tražimo u unutrašnjim tačkama domena skalarne funkcije.
- Lokalne ekstreme tražimo u unutrašnjim tačkama domena skalarne funkcije.
- Unutrašnje tačke nekog skupa D formiraju skup $intD$ koji zovemo unutrašnjost skupa D.
- Podsjetimo se da je $(x_0, y_0) \in intD$ ako postoji lopta $L((x_0, y_0); r) \subset D$.

Definicija

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in intD$.

- Ako je za neko $r > 0$, $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in L((x_0, y_0), r)$, onda je (x_0, y_0) *tačka lokalnog minimuma*, a $f(x_0, y_0) = f_{\min}$ je *lokalni minimum* funkcije f.
- Ako je za neko $r > 0$, $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, $(x_0, y_0) \in L((x_0, y_0), r)$, onda je (x_0, y_0) *tačka lokalnog maksimuma*, a $f(x_0, y_0) = f_{\min}$ je *lokalni maksimum* funkcije f.



Funkcija može imati više lokalnih minimuma i maksimuma. Najmanji lokalni minimum zove se globalni minimum, a najveći lokalni maksimum, globalni maksimum.

Teorema

Ako funkcija f ima lokalni maksimum ili minimum u tački (a, b) i parcijalni izvodi prvog reda postoje tada je

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{i} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Tačka (a, b) naziva se **kritična** ili **stacionarana tačka** ako je $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ili neki od ovih parcijalnih izvoda ne postoji.

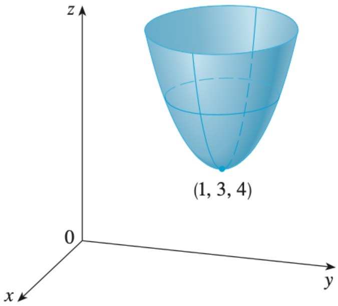
Na osnovu gornje teoreme imamo da je potreban uslov da tačka bude tačka ekstremuma ustvari da je ona stacionarna tačka. Taj uslov nije dovoljan, tj. postoje stacionarne tačke u kojima funkcija nema ekstremum.

Primjer. Posmatrajmo funkciju

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4 \geq 4$$

i $f(1,3) = 4$. Vidimo da je

$$f_{\min} = f(1,3) = 4.$$



U ovom primjeru nije bilo potrebno tražiti prve izvode jer znamo tačno kako izgleda grafik funkcije f. Dakle, to je paraboloid sa temenom u $(1,3,4)$.

Primjer. Posmatrajmo sada funkciju

$$f(x,y) = y^2 - x^2.$$

Kako je

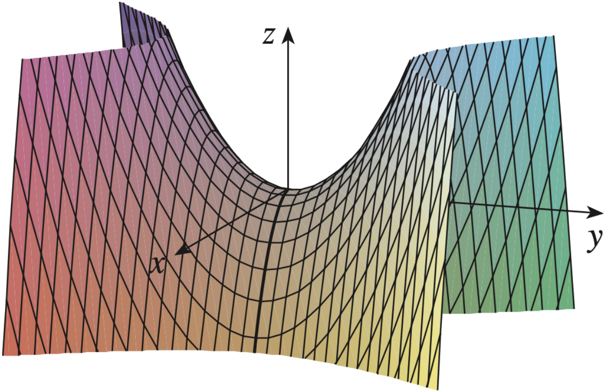
$$f_x = -2x \qquad f_y = 2y$$

jedina stacionarna tačka je $(0,0)$, pa ekstremum može da se pojavi samo u njoj.
Medjutim, primjetimo da je

$$f(0,y) = y^2 > 0, \quad \text{za } y \neq 0$$

$$f(x,0) = -x^2 < 0, \quad \text{za } x \neq 0$$

Dakle, u svakoj okolini tačke $(0,0)$ ima tačaka za koje je f pozitivno, a ima tačaka u kojima je f negativno. Zaključujemo da tačka $(0,0)$ nije tačka ekstremuma i kažemo da je ona *sedlasta tčka*.


z
y
x

Test drugog diferencijala

- Prilikom pronalaženja ekstremuma funkcije dvije promenljive prvo posmatramo tačke u kojima parcijalni izvodi ne postoje.
- Prirodu takvih tačaka ispitujemo po definiciji, odnosno gledamo da li je grafik funkcije f iznad ili ispod ravni $z = z_0$.
- Zatim posmatramo stacionarne tačke, tj. tačke u kojima je $f_x = f_y = 0$.
- Dakle, u pomenutim tačkama prvi diferencijal je jednak nuli,

$$df(x_0, y_0) = 0$$

a drugi diferencijal je

$$d^2f(x_0, y_)(dx, dy) = f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2$$

polinom drugog stepena po dx i dy.

- Slučaj $dx = dy = 0$ nas ne zanima, jer to znači da je priraštaj nula, odnosno da se nismo pomjerili iz tačke (x_0, y_0).
- Vidjeli smo da je kvadratna aproksimacija funkcije f u tački (x_0, y_0),

$$\begin{aligned} P(dx, dy) &= f(x_0, y_0) + \underbrace{df(x_0, y_0)}_{=0}(dx, dy) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0)(dx, dy) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0)(dx, dy) \end{aligned}$$

- Stoga je

$$d^2f(x_0, y_0) = 2(P(dx, dy) - f(x_0, y_0))$$

Ako je $d^2f(x_0, y_0) > 0$, onda je $P(dx, dy) > f(x_0, y_0)$, odnosno kvadratna aproksimacija (koja bolje aproksimira funkciju u tački od tangentne ravni) je iznad tangentne ravni $z = z_0 = f(x_0, y_0)$, pa u tački (x_0, y_0) funkcija f ima lokalni minimum.

Analogno, ako je $d^2f(x_0, y_0) < 0$, onda je $P(dx, dy) < f(x_0, y_0)$, odnosno kvadratna aproksimacija je ispod ravni $z = z_0 = f(x_0, y_0)$, pa u tački (x_0, y_0) funkcija f ima lokalni maksimum.

Ako $d^2f(x_0, y_0)$ mijenja znak, kao polinom po (dx, dy), funkcija f na svakoj okolini tačke (x_0, y_0) ima vrijednosti i veće i manje od z_0, pa u tački (x_0, y_0) nema ekstremum.

Teorema

Pretpostavimo da su pracijalni izvodi drugog reda funkcije f neprekidni u okolini tačke (x_0, y_0) i neka je

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

i

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

a) Ako je $D > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ tada je $f(x_0, y_0)$ tačka lokalnog minimuma.
b) Ako je $D > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ tada je $f(x_0, y_0)$ tačka lokalnog maksimuma.
c) Ako je $D < 0$ tada$f(x_0, y_0)$ je sedlasta tačka.

Ako je $D = 0$ ne možemo nista zaključiti.

Napomenimo da D možemo zapisivati i preko determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

Primjer. Naći lokalne ekstremume funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^4 - 4xy + 1$$

SOLUTION We first locate the critical points:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Setting these partial derivatives equal to 0, we obtain the equations

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{and} \qquad y^3 - x = 0$$

To solve these equations we substitute $y = x^3$ from the first equation into the second one. This gives

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

so there are three real roots: $x = 0, 1, -1$. The three critical points are $(0, 0)$, $(1, 1)$, and $(-1, -1)$.

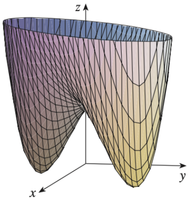


FIGURE 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Next we calculate the second partial derivatives and $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

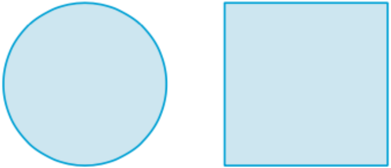
$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Since $D(0, 0) = -16 < 0$, it follows from case (c) of the Second Derivatives Test that the origin is a saddle point; that is, f has no local maximum or minimum at $(0, 0)$. Since $D(1, 1) = 128 > 0$ and $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, we see from case (a) of the test that $f(1, 1) = -1$ is a local minimum. Similarly, we have $D(-1, -1) = 128 > 0$ and $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, so $f(-1, -1) = -1$ is also a local minimum.

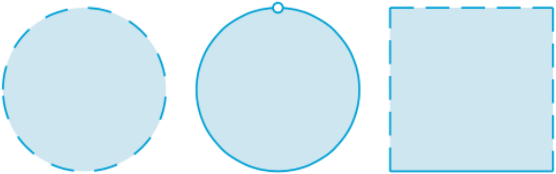
The graph of f is shown in Figure 4. ■

Globalni maksimum i minimum

- Ako pokušamo naći ekstremume na nekom zatvorenom ograničenom skupu neprazne unutrašnjosti, nakon što nadjemo lokalne ekstremume medju unutrašnjim tačkama, moramo analizirati i tačke na granici.
- Granica zatvorenog ograničenog skupa u $\mathbb{R}^2$ je najčešće glatka kriva data jednom jednačinom ili po delovima glatka kriva čiji je svaki glatki dio dat nekom jednačinom.
- Zbog toga se problem nalaženja globalnog ekstremuma svodi na pronalaženje lokalnih ekstremuma i ekstremuma na granici.



(a) Closed sets



(b) Sets that are not closed

Teorema

Ako je f neprekidna funkcija na zatvorenom, ograničenom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tada f dostiže globalni maksimum i globalni minimum na skupu D.

Postupak nalaženja globalnog maksimuma i globalnog minimuma funkcije f na zatvorenom ograničenom skupu D:

(1) Naći lokalne ekstremume funkcije f na unutrašnjosti skupa D
(2) Naći ekstremne vrijednosti funkcije f na granici skupa D
(3) Najveća vrijednost iz koraka (1) i (2) je globalni maksimum, a najmanja vrijednost je globalni minimum.

EXAMPLE 7 Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ on the rectangle $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUTION Since f is a polynomial, it is continuous on the closed, bounded rectangle D, so Theorem 8 tells us there is both an absolute maximum and an absolute minimum. According to step 1 in (9), we first find the critical points. These occur when

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

so the only critical point is (1, 1), and the value of f there is $f(1, 1) = 1$.

In step 2 we look at the values of f on the boundary of D, which consists of the four line segments L_1, L_2, L_3, L_4 shown in Figure 12. On L_1 we have $y = 0$ and

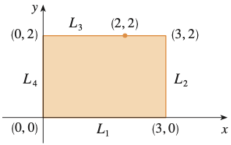


FIGURE 12

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

This is an increasing function of x, so its minimum value is $f(0, 0) = 0$ and its maximum value is $f(3, 0) = 9$. On L_2 we have $x = 3$ and

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

This is a decreasing function of y, so its maximum value is $f(3, 0) = 9$ and its minimum value is $f(3, 2) = 1$. On L_3 we have $y = 2$ and

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

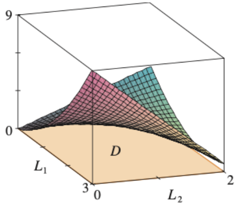


FIGURE 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

By the methods of Chapter 3, or simply by observing that $f(x, 2) = (x - 2)^2$, we see that the minimum value of this function is $f(2, 2) = 0$ and the maximum value is $f(0, 2) = 4$. Finally, on L_4 we have $x = 0$ and

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

with maximum value $f(0, 2) = 4$ and minimum value $f(0, 0) = 0$. Thus, on the boundary, the minimum value of f is 0 and the maximum is 9.

In step 3 we compare these values with the value $f(1, 1) = 1$ at the critical point and conclude that the absolute maximum value of f on D is $f(3, 0) = 9$ and the absolute minimum value is $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. Figure 13 shows the graph of f. ∎